Febrero 2011

EL CENTENARIO DE LOS *PRINCIPIA* DE BERTRAND RUSSELL A PROPÓSITO DEL ARTÍCULO DE J. M. SÁNCHEZ RON EN EL PAÍS

Antonio Mora Plaza
antonioamora@hotmail.com

Para citar este artículo puede utilizar el siguiente formato:

Mora Plaza, A.: *El centenario de los Principia de Bertrand Russell a propósito del artículo de J. M. Sánchez Ron en El País*, en Contribuciones a las Ciencias Sociales, febrero 2011. www.eumed.net/rev/cccss/11/

Me ha llamado la atención el artículo de José María Sánchez Ron en el diario EL PAÍS titulado "*El valor del fracaso digno*"[1]. El autor es uno de los más conocidos historiadores y divulgadores de la ciencia en España y le he leído siempre con fruición todo lo que ha publicado y que yo me haya enterado. Sin embargo, esta vez me ha decepcionado en su artículo. No haré un resumen del mismo porque es del día 11 y puede ser leído en Internet. En la primera parte habla de la incoherencia de los políticos cuando se les pregunta una cosa y contestan a una supuesta pregunta que no ha sido formulada. Me saltaré la crítica a los políticos porque eso no es conveniente para el medio donde va destinado este. Voy ahora a Bertrand Russell (1872-1970), porque en realidad el profesor Sánchez Ron apenas desarrolla el tema de los *Principia*, aunque lo hace de forma acertada, señalando el intento -que luego el teorema de Godel demostró baldío- de rehacer toda la Matemática bajo los principios de la lógica. Invito a Sánchez

[1] http://www.elpais.com/articulo/opinion/valor/fracaso/digno/elpepiopi/20101111elpepiopi_11/Tes

Ron a que desarrolle el tema en el medio publicado o en este más modesto de Nueva Tribuna. Sé que lo ha hecho de forma brillante en sus libros y a lo largo de su carrera. En España y en castellano aparecieron "*Los principios de la matemática*"[2] en 1967 en la editorial Espasa-Calpe, aunque los derechos los tenía desde 1948, pero no sé de que nunca aparecieran traducidos sus tres tomos de "*Principia Mathematica*". No sé tampoco si puede achacar a la censura franquista este largo período desde la propiedad de los derechos hasta su publicación o son otras las causas. Es claro que la figura de Bertrand Russell no era precisamente querida por los censores, pero no por su obra científica, lógica y matemática, que apuesto las dos piernas y un brazo que aquellos no tenían ni la más remota idea de ella, sino porque ese inglés de *impronta volteriana* era una figura mundialmente conocida por su pacifismo y su lucha contra toda forma de dictadura y de opresión. En un libro[3] cita Jesús Mosterín unas palabras del filósofo inglés: "*tres pasiones simples, pero abrumadoramente fuertes, han gobernado mi vida: el anhelo de amor, la búsqueda del conocimiento y la insoportable piedad por los sufrimientos de la humanidad*". Y merece la pena seguir con sus palabras, tanto por su hondura como por la belleza con que están expuestas: "*Estas pasiones, como grandes vientos, me han llevado caprichosamente de acá para allá sobre un océano de angustia, llegando al límite de la desesperación*". La pasión por las matemáticas de B. Russell arranca -según propia confesión- a la temprana edad de los once años, pero también de la decepción que le supuso saber que Euclides "*partía de axiomas*". Fue su hermano el que le convenció de que "*si no los aceptaba no podríamos seguir adelante*". Los aceptó, pero a regañadientes, porque a cambio sus próximos veinte años fueron una carrera con un fin: demostrar que esos axiomas podían ser sustentados, cobijados, reducidos a principios lógicos. Eso es lo que se ha dado en llamar *logicismo*, y es una de las tres escuelas o tendencias de las matemáticas que aún perviven. Las otras dos son el *intuicionismo* (Brouwer) y el *formalismo* (Hilbert)[4].

Tengo en mis manos "*Los principios…*". Los leí por primera vez en la adolescencia y desde entonces les echo un ojo cada cierto tiempo, sin saber si me gusta más el rigor de sus razonamientos, su

[2] En español "*Los principios de la Matemática*", Espasa-Calpe, 1967.
[3] "*Los lógicos*", Espasa-Calpe, colección Austral, 2007, pág. 218.
[4] Un libro estupendo y muy asequible para espíritus curiosos es la conocida *"Historia de la matemática",* de Carl B. Boyer, Alianza Universidad Textos, 1986.

atrevimiento en discutir verdades admitidas o esa impronta con que están escritos. Su atrevimiento es proverbial. Para cuando escribe B. Russell ya se ha producido uno de las mayores revoluciones en el campo de las matemáticas. Esa revolución lleva un nombre: Georg *Cantor* (1845-1918). Este ruso nacido en San Petersburgo ha creado toda una matemática a partir de una concepción del infinito alternativo al de origen aristotélico. Hasta entonces -incluso para *Gauss*- el infinito es potencial, es decir, un conjunto es infinito -diríamos hoy- si dado un elemento cualquiera de un conjunto ordenado podemos encontrar o calcular el elemento siguiente. Nadie puso este criterio en duda hasta Cantor, aunque ya *Galileo* (1564-1642) advirtió una contradicción en el conjunto de los números naturales. Vio el de Pisa que podía hacerse corresponder uno a uno el conjunto de los números naturales con el conjunto de los pares, haciendo que **1** se aplicara a **2**, **2** a **4**, **3** a **6**, y en general -y esto es lo decisivo-, ***n*** a **2*n***. Y sin embargo un conjunto (el de los impares) es un subconjunto, un trozo de el de los naturales. Pero la cosa se quedó ahí hasta *Bolzano* (1781-1848). Cantor admitió que otro criterio de infinito sería el del *infinito actual*[5], es decir, que podía operarse con reglas del análisis -aunque propias- con un conjunto infinito en el que tuviéramos todos sus elementos a la vez, en la mano. La paradoja de Galileo la resolvió otro matemático -*Dedekind* (1831-1916)- convirtiendo la paradoja en el criterio básico de una nueva matemática y que Cantor hace suyo: *un conjunto es infinito si se puede establecer una correspondencia del conjunto con una parte del mismo*. Eso no puede ocurrir con uno finito. A partir de esa definición Cantor transforma las matemáticas. Una de las propiedades de los conjuntos infinitos es la de que unos son más infinitos que otros. El *petersburgués* demostró que el conjunto de los números irracionales es de un grado de infinitud mayor que el de los números racionales, que son los que pueden se puestos como cociente de dos números enteros. Una locura inesperada, pero inapelable si aceptamos algunas premisas previas. A partir de ahí hay una jerarquía de conjuntos infinitos que se pueden obtener sin que se puedan poner en correspondencia unos con otros: son los conjuntos transfinitos. Los últimos años de la vida de Cantor fue, como dice Jesús Mosterín en el libro mencionado, "*un continuo entrar y salir de la clínica siquiátrica*". Pues bien, B. Russell, poniéndose la matemática por montera, niega la realidad de los

[5] "*Fundamentos para una teoría general de conjuntos*", Georg Cantor, Editorial Crítica, S. L., 2005, pág. 103. También "Grandes matemáticos", en Investigación y Ciencia, temas 1, 1995.

números irracionales[6]. Estos números, esta fundamentación de la aritmética, nunca se explica convenientemente en las facultades salvo, supongo, en las de matemáticas. En realidad no se estudian los fundamentos de las matemáticas, sino que en seguida nos ponemos a derivar, integrar, calcular ecuaciones, ecuaciones diferenciales, a trabajar con el álgebra matricial, con las probabilidades, etc. Es una de las reformas que ha de hacerse en los estudios donde se aplican las matemáticas, que son casi todos, hasta los de psicología y biología. Sólo los filólogos se quedan a salvo, porque los de Derecho las necesitan aunque ellos no lo sepan al principio o no se lo crean. Los números reales son la suma de los racionales y los irracionales. Los racionales son o pueden ser siempre resultado del cociente de dos números enteros. Por ejemplo, el número **3**/**7**. Estos números se caracterizan porque si hallamos ese cociente indicado, constan o pueden constar de una parte entera y un número infinito de decimales a partir de la coma, pero con la particularidad de que a partir de un cierto número - a lo más 10- se repiten. Por ejemplo, el número racional anterior **3**/**7** es igual a 0,42857142857……, que se repite su secuencia a partir del quinto decimal. En cambio el número siguiente que vamos a llamar "pepe":

pepe = 0,101001000100001…..

no se repite nunca porque se ha construido aumentando sucesivamente el número de ceros cada dos *unos*; es infinito su número de dígitos y no puede ponerse como cociente (razón) de dos números enteros. Es un ejemplo de número *irracional*. Pues bien, Bertrand Russell niega la existencia de estos números[7] y eso le situaba y le sitúa en la heterodoxia. Intentaré explicarlo en lugar de dar alguna cita. La clave del lógico inglés al negar la existencia del número irracional (de los irracionales) está en los puntos suspensivos del ejemplo. Bajo algún criterio (el del *infinito potencial*) es verdad que el número queda perfectamente definido, porque sabemos como aumentar el número de

[6] En realidad se habla siempre de *reales* porque estos son la suma de los *racionales* y de los *irracionales*, pero lo que marca la pauta del distinto grado de infinitud no es el hecho de que un conjunto (los racionales) sea menor que la suma de los racionales e irracionales (los reales), sino por el hecho de que por sí solos -sin añadir los racionales-, los irracionales tienen un grado de infinitud mayor que los racionales.

[7] "*Los principios de la Matemática*", pág. 313.

dígitos. Es un número *construible*; pero desde otro punto de vista, este número es inoperante si no fijamos en el número de dígitos, que es infinito. No podríamos, por ejemplo, operar con él en un ordenador porque no puede convertirse en una ristra de unos y ceros *finita*. Tampoco podemos multiplicarlo por otro número y calcular realmente su valor porque no tenemos una última cifra decimal. Además -y este es el principal argumento de B. Russell- podemos aproximarlo por dos números racionales tanto como queramos. Por ejemplo, el número irracional del ejemplo está comprendido entre estos dos números:

$$0{,}101001000100001 < \text{pepe} < 0{,}101001000100002$$

Y si lo queremos aproximar más, podemos hacerlo con estos dos:

$$0{,}101001000100001000001 < \text{pepe} < 0{,}101001000100001000002$$

Y así indefinidamente. Pero los números a derecha e izquierda de "pepe" son *racionales* porque son *finitos*. Niega B. Russell también -si no me equivoco en la interpretación- la necesidad de los irracionales para establecer la continuidad de las funciones en el cálculo infinitesimal: con los racionales basta y sobra. La razón es la de que entre dos racionales siempre se puede construir otro racional: por ejemplo, su media aritmética, aunque no es la única forma de intercalación. Es verdad que entonces -aparentemente- no puede ponerse en correspondencia los *números* con las *distancias*, la aritmética con la geometría. Por ejemplo, la ***raíz de* 2** es un número *irracional* porque se puede demostrar -y es una demostración simple, pero trascendente- de que no puede ponerse como cociente de dos enteros; pero *raíz de 2* es también la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales y de valor 1 cada uno de ellos, por lo que la proyección de esta distancia (*raíz de 2*) en una recta (recta real) da una distancia que no coincide exactamente con ningún número racional. Parecería que B. Russell ha sido refutado, pero no es tan fácil, porque esa proyección es meramente geométrica (con un compás) y eso no indica que exista una distancia real (*geometría*) coincidente con el valor *aritmético* de *raíz de 2*. Y si lo es, lo es por hipótesis y no por conclusión a partir de alguna hipótesis. Russell aceptaría esta argumentación, aunque añadiría que esa distancia en cambio puede ser aproximada por dos números racionales -como en el ejemplo del número "pepe"- tanto como se quiera. Todo esto lleva a *la hipótesis del* *continuo*, problema expuesto por Hilbert (1862-1943) en 1900, en la famosa ristra de 23 problemas irresueltos en su momento.

A partir del capítulo 29 de los *Principia*, todo se hace más inteligible para el no especialista, porque nos habla de cosas más habituales para los que utilizan -utilizamos- las matemáticas sin necesidad *operativa* de entrar en los intentos de su fundamentación lógica. Quizá por ello nos atrae B. Russell en su intento de fundamentación de las matemáticas en este punto, porque le vemos más asequible, más de sentido común; en cambio nos es más difícil aceptar la existencia del infinito *actual cantoriano* en lugar del infinito *potencial*. Es una resistencia lógica o pedagógica, pero existe. Esa es una de las razones -además de la ignorancia de los profesores sobre los fundamentos- por la que no se explican en las facultades *los fundamentos* de las matemáticas o se explican deprisa y corriendo y mal. Todo lo que he aprendido sobre esta materia (los fundamentos) ha sido por obra de un esfuerzo personal y llevado por una curiosidad irrefrenable. A la larga este déficit en la enseñanza universitaria se paga. Hoy las matemáticas son materia de especialistas y una de las razones del atraso de la formación pos-universitaria es la deficiente formación en esta materia -y consecuentemente en materia tecnológica y científica- de los gestores, empresarios y contratadores de muchas empresas, que no les permiten tomar decisiones en estos campos con conocimiento de causa porque están incapacitados en la lectura de textos, informes, etc., cuando estos han de expresarse ineludiblemente en lenguaje matemático. Es un cuello de botella que no ha sido detectado por ningún estudio, por lo que ha de tomarse como una hipótesis en principio.

Volviendo a los *Principia*, al final B. Russell resultó derrotado de su intento de construir una matemática sustentada en la Lógica. Como señala el profesor Sánchez Ron, en 1933 apareció una sorprendente y genial demostración de Kurt Godel[8] (1906-1978), matemático y lógico nacido en territorio de la actual Chequia, que hizo estéril e incoherente el intento de B. Russell: no hay forma de establecer una matemática -una aritmética en particular- basada en un conjunto de axiomas o postulados que lleve a dar con todos los teoremas habidos y por haber, porque pasará una de estas dos cosas: o algún teorema se escapa del

[8] Es con diéresis en la o, pero en mi teclado no funciona este acento.

intento y queda indemostrado a pesar de su validez -y por lo tanto no es omnicomprensivo-, o al menos hay uno que es contradictorio con los demás, es decir, que se llega a una conclusión y a su contraria sin error en el razonamiento. Las matemáticas con las que construyen los puentes los ingenieros y los rascacielos los arquitectos no es que sean falsas o erróneas, no hay que asustarse. Los dos teoremas de Godel[9] sólo son una dosis de modestia ante los intentos del *todo* matemático o lógico. Se pueden construir todo tipo de edificios matemáticos coherentes (no contradictorios) a partir de hipótesis y postulados y con conclusiones y teoremas ciertos y útiles, pero siempre serán sistemas limitados, nunca omnicomprensivos, que servirán para resolver unos problemas y no otros. Por ejemplo, la matemática euclidiana sirve para solucionar problemas geométricos definidos en espacios de 3 dimensiones basados en rectas y curvas, con un tipo específico de definición de distancia, pero no sirven, por ejemplo, para aplicarlo a la teoría de la relatividad; el álgebra que hemos estudiado en el bachillerato sirve -entre otras cosas- para resolver ecuaciones de hasta cuarto grado, pero no para las de quinto o más (en términos generales); los números reales por sí solos no resuelven todas las ecuaciones y muchas veces hay que pasar por *las horcas caudinas* de los imaginarios (en los que aparece *la raíz cuadrada de -1*) para obtener soluciones *reales*. El hallazgo de Godel, su *performance*, es una de las conquistas intelectuales más altas de la humanidad; quizá sólo le es comparable la demostración *del teorema fundamental del álgebra*[10] por *Gauss* (1777-1855). También marca los límites del intelecto.

Bertrand Russell fue al final derrotado en términos estrictamente lógicos ante su intento de cimentar la matemática en la lógica, pero su esfuerzo no ha sido baldío. Muchos avances en las matemáticas, empezando por el comentado del teorema de Godel, han surgido ante el esfuerzo de refutar a los *Principia*, lo mismo que refutó él la lógica de *Frege* (1848-1925) con una simple paradoja; sin Cantor no existirían, por ejemplo, *Von Neumann* y *Alain Turing* y su maquina universal, base de la lógica de los ordenadores. Todo esto demuestra además la importancia de estudiar y de implementar en los planes de estudio

[9] Hay muchos libros en castellano con el teorema. A mí el que más me gusta es el de nuestro gran Manuel Sacristán "*Introducción al análisis y a la lógica formal*", Círculo de Lectores, 1990, páginas 247 y siguientes. Más actual es el de "*Godel para todos*", de G. Martínez y G. Piñeiro, Ediciones Destino, 2010.

[10] "*La matemática: su contenido, métodos y signifcado*", Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, etc., Alianza Universidad, 1973, páginas 338 y siguientes.

universitario de economía, ingeniería, finanzas, biología, etc., la historia de las matemáticas. La derrota del inglés recuerda la interpretación de *Ortega* de *El Quijote* como la exaltación del fracaso a pesar del esfuerzo; y sin embargo, no se entendería, a cambio, la literatura española y parte de la europea posterior a Cervantes sin la historia inventada de la eterna pareja. La historia está llena de derrotas antes de llegar a la victoria: ejemplos de ello son las teorías físicas y/o químicas basadas en el calórico, en el flogisto o en el éter. La ideología del que queda segundo es un derrotado y que "*sólo el ganador es valorado y recordado*", que denuncia Sánchez Ron, no tiene validez universal, es la ideología de la competitividad -que no de la competencia- como bien supremo, la del éxito en los negocios como valor ético; es una ideología reaccionaria, de origen weberiana en su teorización y justificación, propia de los países anglosajones, sustentada en el *paradigma smithiano* de que *buscando el interés particular se consigue el general*. No es la ideología de los derechos humanos, del humanismo, del erasmismo[11] europeo. Incluso Schumpeter padece de esta ideología con su teoría de los ciclos basados en la destrucción creativa, pero al menos esta teoría puede ser contrastada históricamente.

Madrid, 18 de febrero de 2011.

[11] Véase las partes más europeas del libro de José Luis Abellán "*El erasmismo español*", Espasa-Calpe, 2005.